Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 11.07.2014.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(30%)(a) Centar upisanog kruga u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu $12 : 5$. Ako je dužina kraka trougla $60\,cm$, naći dužinu osnovice tog trougla.

(70%)(b) Unutr pravilne kupe sa vrhom P i bazom $k(O, r)$ konstruisana je kocka takva da četri njezina vrha pripadaju omotaču kupe, a preostala četri vrha pripadaju bazi kupe. Ako je omjer između visine kupe i poluprečnika baze kupe $\sqrt{2} : 1$, pokazati da je stranica kocke jednaka $\frac{1}{2}$ visine kupe.

Zadatak br. 2

(30%)(a) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove visine leže na datim pravama.

(70%)(b) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao $\triangle ABC$, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

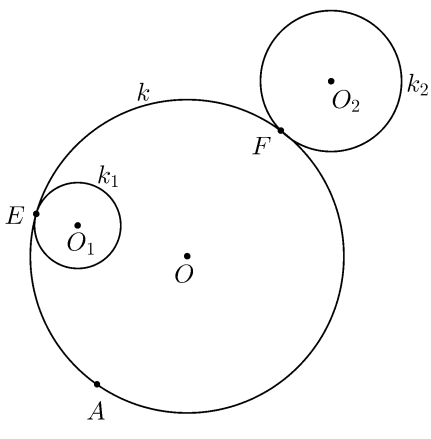
Napomena. *Konkurentne prave* su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

U oba zadatka detaljno sprovesti sve četri koraka: analizu, konstrukciju, dokaz i diskusiju.

Zadatak br. 3

(30%)(a) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

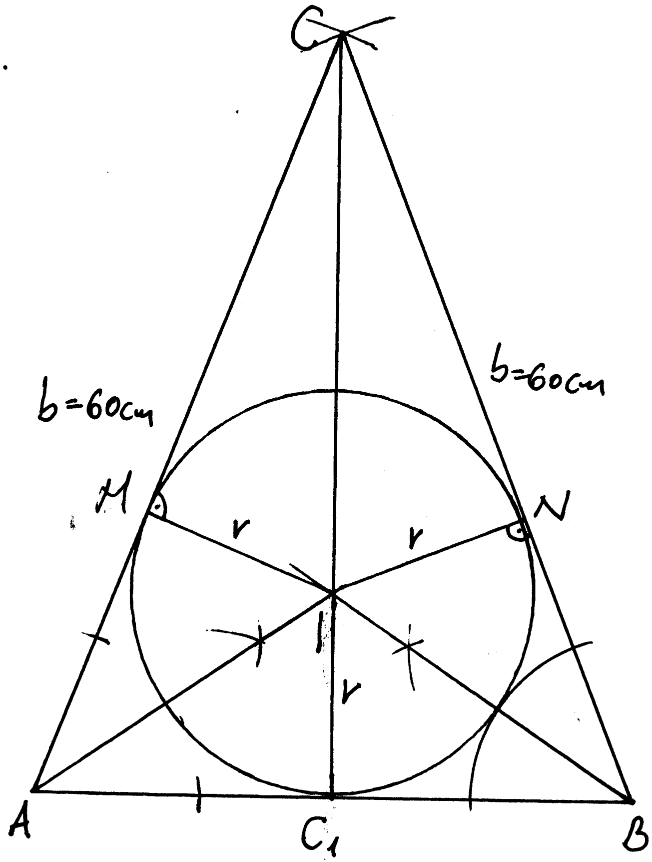
(70%)(b)Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, ($r_1 < r_2$) i tačka A. Konstrisati krug k koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu dijeli visinu u odnosu 12 : 5. Ako je dužina kraka trougla 60 cm, nađi dužinu osnovice tog trougla.

Rj.



Označimo sa I centar upisanog kruga. Visina CC_1 spuštena na stranicu AB je ujedno i simetrala ugla $\measuredangle ACB$ pa je $I \in CC_1$. Posmatrajmo trouglove ΔAIC i ΔBIC. U ΔAIC visina na stranicu AC je $MI = r$.
U ΔBIC visina na stranicu BC je $NI = r$.
U ΔABI visina na stranicu AB je $C_1I = r$.

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AIC} + P_{\Delta BIC} + P_{\Delta ABI}$$

(ako označimo sa $h = CC_1$, sa $a = AB$, i sa $b = BC = AC$)

$$\frac{h \cdot a}{2} = \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

$(b = 60\ cm)$

$$\frac{h \cdot a}{2} = r \cdot 60 + \frac{r \cdot a}{2}$$

(Znamo $\frac{CI}{IC_1} = \frac{12}{5}$ (iz postavke)

$$\frac{CI}{IC_1} + 1 = \frac{12}{5} + 1$$

$$\frac{\overbrace{CI + IC_1}^{=h}}{\underbrace{IC_1}_{=r}} = \frac{17}{5} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{17}{5}$$

$$h = \frac{17}{5} r$$

... (1))

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{17}{5} r \cdot \frac{a}{2} = 60r + \frac{a}{2} r \quad / : r$$

$$60 + \frac{a}{2} = \frac{17a}{10} \quad / \cdot 10$$

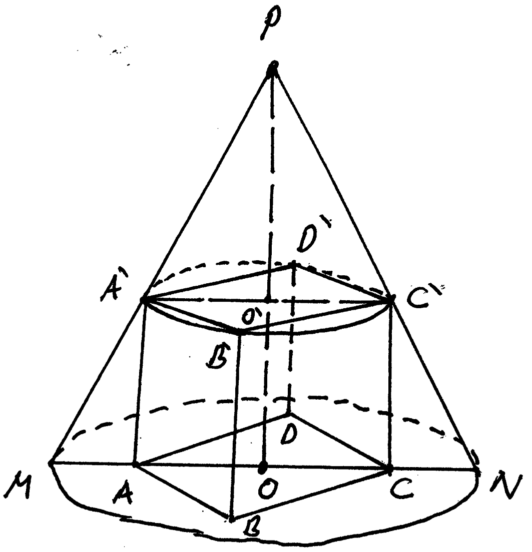
$$17a - 5a = 600$$

$$12a = 600$$

$$a = 50\ cm \leftarrow \text{traženo rješenje}$$

(#) Unutar pravilne kupe sa vrhom P i bazom $k(O,r)$ konstruisana je kocka takva da četri njezina vrha pripadaju omotaču kupe, a preostala četri vrha pripadaju bazi kupe. Ako je omjer između visine kupe i poluprečnika baze kupe $\sqrt{2}:1$, pokazati da je stranica kupe jednaka $\frac{1}{2}$ visine kupe.

Rj:



Neka je $ABCDA'B'C'D'$ konstruisana kocka stranice a takva da vrhovi A, B, C i D pripadaju bazi kupe, a vrhovi A', B', C' i D' pripadaju omotaču kupe. Sa PO označimo visinu kupe i neka je O' presječna tačka visine kupe i stranice $A'B'C'D'$ kocke. Duž AC produžimo do tački M i N tako da je MN prečnik baze k.

Na osnovu postavke zadatka $\frac{PO}{NO} = \frac{\sqrt{2}}{1}$. ...(1)

Kako je kupa pravilna i kako vrhovi kocke pripadaju omotaču i bazi, tada O i O' pripadaju presjeku dijagonala strana $ABCD$, $A'B'C'D'$ kocke, iz čega slijedi da su $A'O'C'$ i AOC jednaki prečniku gornjeg dijela kruga i da su redom $\parallel$ i komplanarni sa bazom.

$A'C' \parallel MN \Rightarrow \frac{PO}{NO} = \frac{PO'}{C'O'} = \sqrt{2}$ (na osnovu (1)) $\Rightarrow PO' = \sqrt{2}\, C'O'$

Ali

$PO' = PO - OO' = PO - a$ i $C'O' = \frac{1}{2} C'A' = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ $(A'C' = a\sqrt{2})$

$\Rightarrow PO' = \sqrt{2}\, C'O' = a = PO - a \Rightarrow a = \frac{1}{2} PO$

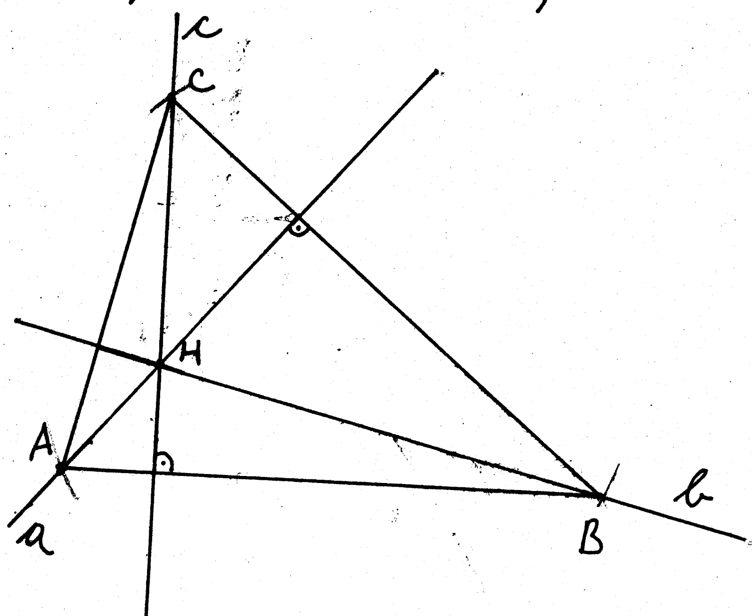
q.e.d.

Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove visine leže na datim pravama.

Rj.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tri prave a, b i c koje se sijeku u tački H, neka je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, i neka a, b i c sadrže visine trougla ΔABC.

Primetimo da postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku A i okomita je na pravu c.

Isto tako, postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tačku B i okomita je na pravu a.

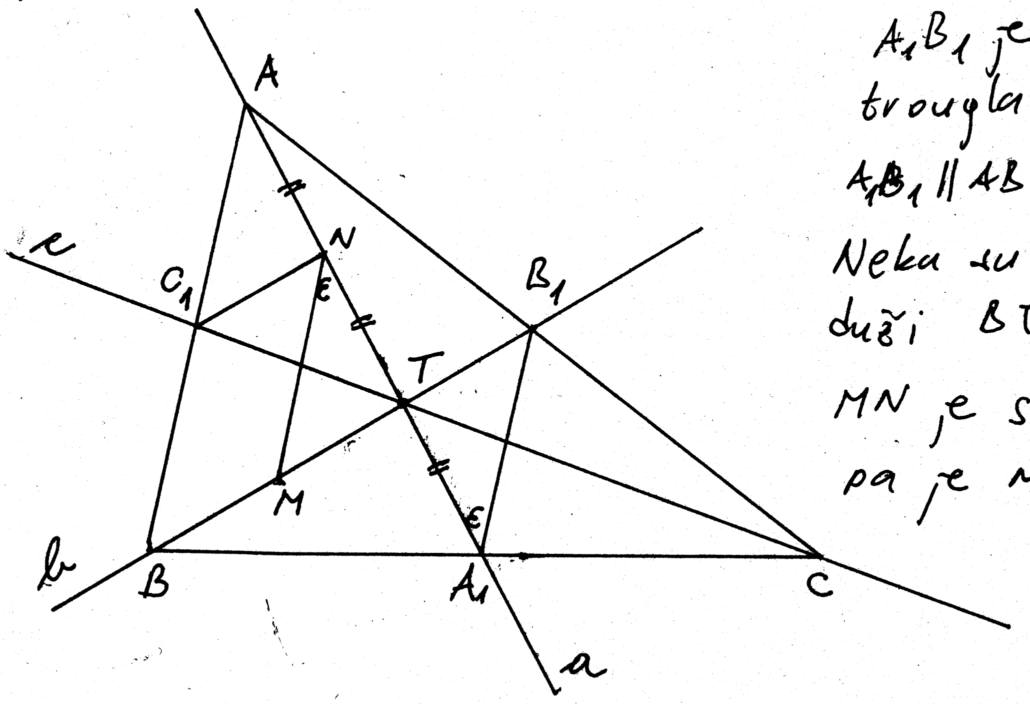
Kako su nam date prave a, b i c i tačka A to nije teško konstruisati tačku B i C.

(#) Date su tri konkurentne prave i na jednoj od njih tačka A. Konstruisati trougao ΔABC, tako da njegove težišne linije leže na datim pravama.

Napomena: Konkurentne prave su prave koje prolaze kroz jednu tačku.

Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka su a, b i c tri konkurentne prave koje prolaze kroz tačku T, neka su date tačke $A, A_1 \in a$, $B, B_1 \in b$ i $C, C_1 \in c$ takve da ΔABC ima težišne duži AA_1, BB_1 i CC_1.



A_1B_1 je srednja linija trougla ΔABC pa je

$A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ ...(*)

Neka su M i N redom središta duži BT i AT.

MN je srednja linija ΔBTA pa je $MN \parallel AB$ i $MN = \frac{1}{2}AB$ ...(**)

Iz (*) i (**) $MN \parallel A_1B_1$ i $MN \cong A_1B_1$.

$MN \parallel A_1B_1$ i $p(A, A_1)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle TA_1B_1 \cong \measuredangle TNM = \varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MTN \cong \measuredangle A_1TB_1 \\ \quad \text{(unakrsni)} \\ \measuredangle TNM \cong \measuredangle TA_1B_1 = \varepsilon \\ MN \cong A_1B_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta MTN \cong \Delta TA_1B_1$$

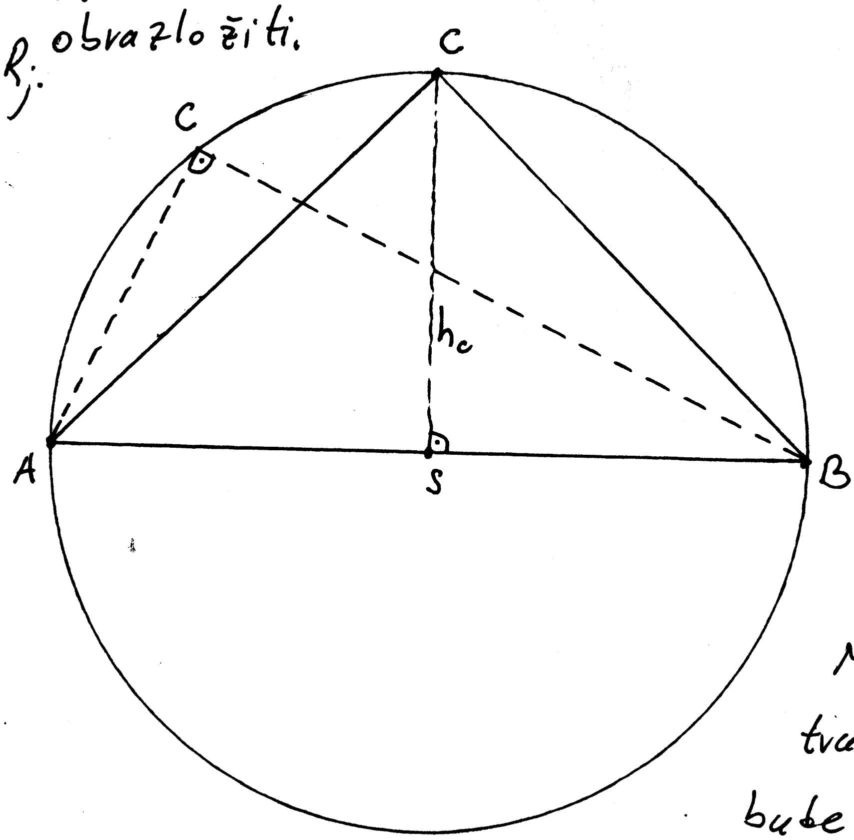
$$\Downarrow$$

$$TN \cong TA_1$$

Primjetimo da je C_1N srednja linija $\Delta ABT \Rightarrow C_1N \parallel b$.
Tačke A i T su date pa možemo konstruisati sredinu N duži AT a time i tačku A_1. Kako su date prave a, b, c i znamo da je $C_1N \parallel b$ to možemo konstruisati i tačku C_1. Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći,

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudarni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.